永遠亭のお仕事事情

-市民のための疫学と医療統計学の基礎-

後藤和智事務所OffLine

永遠亭のお仕事事情

市民のための疫学と医療統計学の基礎

発行：2014 年 12 月 30 日（コミックマーケット 87）
著：後藤和智（後藤和智事務所 OffLine）
表紙イラスト：フウザサ（風前ランプ）

0.1 はじめに

——永遠亭にて。

鈴仙・優曇華院・イナバ（以下、鈴仙）：そろそろ、妖夢たち来る頃かな。

因幡てゐ（以下、てゐ）：そうだねぇ。

鈴仙：しっかし、幽々子さんが提案した妖夢の研修に、あの師匠と姫様が付き合ってくれるなんて、どういうどういう風の吹き回しなんだか…。

てゐ：何言ってんだ。鈴仙、この研修はあんたのためでもあるんだよ。

鈴仙：そうだった。妖夢の研修を引き受けるついでに、あたしにも医療やそれに関する統計学を学ばせたいって師匠と姫様が言ってたんだった。

霧雨魔理沙（以下、魔理沙）：医療には Evidence Based Medicine（EBM）という概念があって、医療行為や薬の開発などにはその効果を示す客観的な根拠、エビデンスが必要になる。また疫学の観点からしても、特定の環境への曝露が健康に及ぼす影響などについても、広範なエビデンスを取って確認する必要がある。医療はまさに統計学が重要な意味を持つ分野だと言えるぜ。

鈴仙：魔理沙、そもそも疫学とか医療統計の研修をやろうって師匠や姫様に仕掛けたのはあんただよね。

魔理沙：まあな。少し前に永琳や輝夜と話してたとき、鈴仙には永琳のサポート役としてもう少し専門的な知識をつけてほしいと相談を受け、それで統計学はどうか、って提案したんだ。統計学なら医療や製薬の基礎にも関わっているし、ちょうどいいと思ったしな。ついでに以前妖夢が統計学や保険数学、経済学などで数式に苦しめられていたのを見て、せっかくだから妖夢にも受けさせてやろうって思ったわけだ。

鈴仙：妖夢まで巻き込む必要あるのかなぁ…。

てゐ：そんなこと言って、本当は嬉しそうだよねぇ。妖夢も一緒に講義を受けるって聞いて、鈴仙、かなり嬉しそうな表情してたじゃん。

鈴仙：な！？　ふ、ふざけないでよ！

魔理沙：おっと、そんなことをしている内に、もう一人の生徒様がおいでなすったようだぜ。

魂魄妖夢（以下、妖夢）：失礼します。

西行寺幽々子（以下、幽々子）：こんにちは～。ご無沙汰してます～。

鈴仙：こんにちは、妖夢、幽々子さん。

魔理沙：生徒が揃ったところで、私も講師様を呼んでくるぜ。

幽々子：鈴仙ちゃん、お久しぶりね～。

鈴仙：幽々子さんもお久しぶりです。妖夢は何回か人里で会ってるけど、ここに来るのは久しぶりだっけか。

妖夢：はい。いつ見てもここは落ち着いた雰囲気でいいですね。

魔理沙：というわけで、講師様も連れてきたぜ。

蓬莱山輝夜（以下、輝夜）：さて、いよいよ医療と統計学の授業の始まりね。腕が鳴るわ。

八意永琳（以下、永琳）：妖夢も幽々子さんもお久しぶりね。さて、早速だけどこの講義の概要について説明するわ。まず、この研修の前提知識となる基本的な統計学の復習から始めるわ。医療や疫学に関する統計学の解説はその次ね。そして統計学の後は、医療や疫学を構成する社会科学的な側面、例えば政策論や医療経済学について説明を行うわ。全体としてこの講義は、医療を構成する医学、薬学などとはまた違った、統計学や社会学の側面がどのようなものになるか、大掴みできるような厚生としているわよ。

輝夜：さて、この研修の概要の説明も終わったところだし、読者の皆様への挨拶もしておかないとね。

魔理沙：そうだな。というわけで、このたびは「後藤和智事務所 OffLine」46 冊目の同人誌を手に取ってくれてありがとう。本書は疫学や医療の統計学を中心に、疫学や公衆衛生、医療政策について解説するものだ。医療分野は人々の関心を集めるものだが、他方で高度に専門化されていてわかりづらい、というのも少なくはないだろう。

てゐ：特に 2011 年の東日本大震災や福島第一原発の事故以降、人々の弱みや不安につけ込んで不安を煽ったりと

いうものもあったからね。本書の著者としても、医療の持つ社会的な背景を解説して、医療と市民の間をなんとか埋めたいという意図があるのさ。

魔理沙：てゐは「人の弱みや不安につけ込んで」とか言えるような立場ではないとは思うがな。それはさておき、医者や医学博士という肩書きを持っている人すら、医療不安、医療不信の言説を煽り立てていることもまたよく見られることだ。それに騙されないため、というわけではないが、いずれにせよ医療を支えている統計学や統計、そして技術や制度などのことを知っておいて損はないしな。

永琳：だから本書を通じて、読者の皆様にも医療を支えるいくつかの学問がどのように構成されているのかについて学んでいただければ幸いです。

魔理沙：本書の構成を説明すると、まず最初の章では医療統計学を学ぶ上で必要な統計学の知識について復習することにする。第 2 章ではいよいよ医療統計学の基礎について触れるぜ。第 3 章では医療を支えるもう一つの分野として、医療政策や医療経済学について触れることにする。医療を支える、医学や看護以外の学問にも触れて頂き、医療の多面的な側面を理解してほしい。

鈴仙：読者の皆様も、あたしたちと一緒に医療について学び、そしていろいろなものを得てくれればいいと思っています。

てゐ：それじゃ、研修に入っていきますかね。

目次

第 1 章

統計学の基礎

1.1 はじめに

輝夜：さーて、まずは統計学の基礎の復習といくわよー。

鈴仙：あれ、師匠じゃなくて、姫様がやるんですか！？

輝夜：何よー。私だって基礎的な統計学の知識くらいはあるわよ。それに永琳だって少し休ませたいしね。この章では、これから医療や疫学の統計学を学ぶに当たって必要な統計学を復習してもらうわ。

妖夢：基礎的な統計学ですか…。実のところ、私もよくわかってなくて…。

輝夜：あらあら。まあまだ問題を出していないからどうこう言えないけれど、少なくとも本章で扱う統計学の基礎位は理解しておかないと駄目よ。ただ本書では医療や疫学の統計学の解説が中心となるから、基礎的な統計学の数理的な背景などの説明は省略させてもらうわ。その辺については、もう少し詳しい統計学の解説書を読んで頂戴[*1]。

幽々子：やっぱり妖夢にはこの研修が必要だったみたいね〜。冥界の管理人である私を補佐するものとして、やっぱり統計学の知識は身に付けておかないとね。

永琳：この分野は輝夜に任せることとして、私は次の章以降の準備に回らせてもらうわ。

てゐ：あたしと幽々子さん、あと魔理沙は各章の最後で参考文献の紹介とかをするよ。

魔理沙：それじゃ、輝夜、あとは頼んだぜ。

輝夜：任せといてよ。それじゃ、改めて、難題「基礎統計学」！　…ってな感じで、統計学のおさらいに入っていこうかしらね。

魔理沙：スペルカードみたいに言うなって。どうせ手持ちの資料から統計学の問題を出すだけだろうが。

輝夜：まあそうなんだけどね。

妖夢：輝夜様の出すこの難題にどれだけ私が耐えられるか…。

鈴仙：妖夢も大袈裟だなぁ。それじゃ、さっさと復習しちゃいましょうか。

1.2 平均・分散

輝夜：まずは基本的なデータの処理からね。n 個のデータからなるデータセット $\{x\} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ があるとしましょう。このデータの平均と分散の求め方くらいは、妖夢ちゃんでもわかるわよね。

妖夢：はい、平均と分散程度ならわかります。次のように求めるんですよね。

[*1] 本章で扱う程度の基礎的な統計学の数理的な背景については、東京大学教養学部統計学教室『統計学入門』（東京大学出版会）、小島寛之『完全独習 統計学入門』（ダイヤモンド社）、栗原伸一『入門 統計学』（オーム社）、後藤和智『改訂増補版 紅魔館の統計学なティータイム』（後藤和智事務所 OffLine）などを参照。

平均と分散

$$\textbf{平均}\ E(X) = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \tag{1.1}$$

$$\textbf{分散}\ V(X) = {s_x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2 = E((X - E(X))^2) \tag{1.2}$$

$$\textbf{標準偏差}\ \sigma_x = \sqrt{V(X)} \tag{1.3}$$

輝夜：分散について、もう少し簡単な求め方があるのは妖夢ちゃんは知ってるかしら。

妖夢：はい、二乗の平均値から平均値の二乗を引く、というパターンですよね。

輝夜：そう。それについて証明はできる？

妖夢：はい。次のようにやればよかったはずです。

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\bar{x} \times \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2 \\ &= E(X^2) - 2E(X) \times E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned} \tag{1.4}$$

輝夜：まあこのあたりは知ってて当然な領域だからね。平均値というのはデータを平面にならしたときの値で、分散とは平均からの 2 次のモーメントを求めることにより、データの偏りを求めるための値なのよね。

鈴仙：そのあたりはあたしも理解してます。

輝夜：それじゃイナバ、平均や分散などといった値を**要約統計量**と言うのだけど、平均や分散だけでは見えづらいものもあったりするじゃない。平均とか分散とかではわからないようなデータの特徴を見るために参照するような要約統計量って、他にどういうのがあったかしら。

鈴仙：例えば、データを大きい方、または小さい方から順番に並べたとき、ちょうど真ん中に来るような値を示す**中央値**や、これはデータが離散的なときしか使えませんけど、特定の値の出る数が最も大きいものを示す**最頻値**などがあったりします。

輝夜：上出来ね。とはいえ、概念を知っていたところで求めることができないとなんの話にもならないから、とりあえず次の例題をやってみて頂戴。

例題

次のような度数分布表で示されたデータが存在する。このデータの平均値、分散、標準偏差、最頻値、中央値を求めよ。

X	1	2	3	4	5
度数	5	4	3	2	1

輝夜：この問題は妖夢ちゃんにやってもらおうかしら。

妖夢：はい。まずこのデータは、X が 1 のところに 5 つ集まっていて最も多いですから、最頻値は 1 ということになります。続いて中央値は、このデータが 15 個あるから、上から数えても下から数えても 8 番目にあたる値が中央値になりますね。ということで中央値は 2 です。平均と分散については計算して求める必要がありそうですね。

$$\text{平均}\ E(X) = \frac{1\times 5 + 2\times 4 + 3\times 3 + 4\times 2 + 5\times 1}{15} = \frac{35}{15} = \frac{7}{3} \tag{1.5}$$

$$E(X^2) = \frac{1^2\times 5 + 2^2\times 4 + 3^2\times 3 + 4^2\times 2 + 5^2\times 1}{15} = \frac{105}{15} = 7 \tag{1.6}$$

$$\text{分散}\ V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 7 - \frac{49}{9} = \frac{63-49}{9} = \frac{14}{9} \tag{1.7}$$

輝夜：そうね。このデータのように、下の方に多く集まっているデータだと、平均値は少し大きめになるけれど、最頻値や中央値は平均値よりも若干下回るわ。本書ではあまり扱わないけれど、経済に関するデータだとこういうのも少なくはないから注意が必要よ。

1.3　相関と回帰分析

輝夜：続いてパラメータが 2 つ以上あるデータの扱いね。妖夢ちゃんも相関係数くらいはわかるわよね。

妖夢：はい、なんとか。

輝夜：それじゃ妖夢ちゃん、まずは共分散と相関係数について説明して頂戴。データは 2 つのパラメータを持つデータセット $\{(x,y)\} = (x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$ としてね。

妖夢：相関係数は、片方のパラメータが大きくなると、もう片方のパラメータはどのように動くかというものを示したもので、片方が大きくなると、もう片方も大きくなるような関係にあるとき、正の相関があると言います。逆に、片方が大きくなると、もう片方が小さくなるような関係のことを、負の相関があると言います。相関係数は、共分散というパラメータを使って次のように求めます。

共分散と相関係数

$$\textbf{共分散}\ Cov(x,y) = s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) \tag{1.8}$$

$$\textbf{相関係数}\rho_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} \tag{1.9}$$

輝夜：はい、よくできました。相関係数は、証明は省略するけれど -1 から 1 までの値しか取らないのも大丈夫よね。

妖夢：はい。

輝夜：ついでだけど、分散が「平均の二乗 − 二乗の平均」から求められるように、共分散も同様の求め方があるというのは妖夢ちゃんは知っているかしら。

妖夢：確か「積の平均 − 平均の積」みたいなものだったと思いますが…。

輝夜：そうね。証明はできる？

妖夢：やってみます。

$$\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})(y_k-\bar{y}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k y_k - \bar{x}y_k - \bar{y}x_k + \bar{x}\bar{y}) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k y_k - \bar{x}\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k - \bar{y}\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k + \frac{1}{n}\times n\bar{x}\bar{y} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k y_k - \bar{x}\bar{y} - \bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k y_k - \bar{x}\bar{y} = E(XY) - E(X)E(Y)
\end{aligned} \tag{1.10}$$

輝夜：さて、2 つのパラメータの関係を考えるとき、相関係数の大きさだけじゃなくて、数値上どういう関係があ

るのかについても表すことが要求される場合があるわ。このとき、何を使えばいいかしら、妖夢ちゃん。

妖夢：えーと…、わかりません…。

輝夜：あらあら。イナバはわかるわよね。

鈴仙：はい。回帰分析ですよね。

妖夢：ああ、回帰分析か…。でもこのあたり私もよくわかっていなくて。

鈴仙：回帰分析って幽々子さんが以前どっかで説明してたような気がするけど*2、妖夢は理解してなかったの？

妖夢：はい…。幽々子様が紅魔館で回帰分析の話をしたときも、実際あまりついていけなくて…。

輝夜：まあ、そんなに落ち込むことはないわよ。ここで改めて頑張って復習すればいいじゃない。

妖夢：はい、そうします…。

輝夜：さて、さっきの 2 つのパラメータを持つデータセットがあるとして、この 2 つに次のような関係があるとするわ。

$$y_i = \alpha + x_i \times \beta + \epsilon_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1.11}$$

輝夜：ϵ はモデルと実際の値の誤差ね。**回帰分析**は、2 つ以上のパラメータを持つデータセットに対して、一つのパラメータに対して、他のパラメータがどのような影響を持っているかを数値で示すことを言うわね。先ほどの式は回帰分析の最も基本的な形である線形単回帰分析ね。ところでイナバ、このモデルの中の数値である α, β を定めるときには、どういう手法を使えばよかったかしら。

鈴仙：**最小二乗法**ですね。モデルによって推測される値と、実際の値の差を計算して、その二乗和が最も小さくなるようにしなければならないっていう。最小二乗法を使うと、モデルによって推測される値から実際の値を引いた差の合計額 0 になるというのも解決されますね。

輝夜：そうね。それじゃ、なぜ最小二乗法による回帰係数と切片の特定は、「全体での残差の合計を 0 にする」「残差の二乗和を最小にする」という 2 つの目標が同時に達成できるか、イナバ、説明できる？

鈴仙：次のようにやればいいんですよね。まずは残差の二乗和を求めると、

$$\begin{aligned} y_i &= \alpha + x_i \times \beta + \epsilon_i \\ \epsilon_i &= y_i - \alpha - x_i\beta \\ \sum_{i=1}^{n} {\epsilon_i}^2 &= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \alpha - x_i\beta)^2 \end{aligned} \tag{1.12}$$

鈴仙：これは α と β の二次関数になるから、これが最小になるためには α と β の両方で微分して 0 になればいい、ってことですよね。

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} \sum_{i=1}^{n} {\epsilon_i}^2 = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - \alpha - x_i\beta) = 0 \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta} \sum_{i=1}^{n} {\epsilon_i}^2 = 2\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - \alpha - x_i\beta) = 0 \tag{1.14}$$

鈴仙：この 2 つの式の内、上の式の括弧内は残差の総和そのものを指してるから、残差の総和が 0 になるという課題も同時に達成されます。そして回帰分析の係数を求める場合には、次の連立方程式を解けばいいことになります。

$$\begin{aligned} \alpha + \beta E(X) &= E(Y) \\ \alpha E(X) + \beta E(X^2) &= E(XY) \end{aligned} \tag{1.15}$$

---

*2 『改訂増補版 紅魔館の統計学なティータイム』第 8 章

輝夜：そうそう。わかってるじゃない。

妖夢：鈴仙さんは勉強熱心なんですね…。私も見習わないと。

輝夜：あと、回帰分析において、モデルの正確さを示す指標もあったわよね。イナバ、なんだったっけ？

鈴仙：**決定係数**ですね。決定係数は、被説明変数を y、モデルによる y の推定値を $\hat{y}$、y の平均値を $\bar{y}$ として、次のようにして求めるものだったと思います。

$$
\begin{aligned}
\text{決定係数 } R^2 &= \frac{\sum(\hat{y}-\bar{y})}{\sum(y-\bar{y})} = \frac{\text{回帰変動}}{\text{全変動}} \\
&= 1 - \frac{\sum(y-\hat{y})}{\sum(y-\bar{y})} = 1 - \frac{\text{残差変動}}{\text{全変動}}
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

輝夜：そんな感じね。あと、決定係数に R^2 という文字が使われている理由はわかる？

鈴仙：それはちょっと…。

輝夜：証明は省略するけど、単回帰分析の場合、説明変数と被説明変数の相関係数の 2 乗は、回帰分析の決定係数に等しくなるのよ。それじゃ早速例題に入っていくことにするわね。

例題

次の値 x,y について、

1. 相関係数を求めよ。
2. 回帰分析を行い、y を x に $y = \alpha + \beta x + \epsilon$ の形で示せ。

x	1	2	3	4	5	6
y	1	3	4	7	6	9

輝夜：相関係数は妖夢ちゃん、回帰分析はイナバにやってもらおうかしら。

妖夢：わかりました。えーと、相関係数だけど、これはそれぞれの標準偏差と共分散を求めればいいから次のようになるかな…。

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3.5 \tag{1.17}$$

$$\bar{y} = \frac{1+3+4+7+6+9}{6} = \frac{30}{6} = 5 \tag{1.18}$$

$${s_x}^2 = \frac{(-2.5)^2+(-1.5)^2+(-0.5)^2+0.5^2+1.5^2+2.5^2}{6} = 2.9167 \tag{1.19}$$

$${s_y}^2 = \frac{(-4)^2+(-2)^2+(-1)^2+2^2+1^2+4^2}{6} = 7 \tag{1.20}$$

$$E(XY) = \frac{1\times1+2\times3+3\times4+4\times7+5\times6+6\times9}{6} = 21.8333 \tag{1.21}$$

$$Cov(X,Y) = 21.8333 - 3.5\times5 = 4.3333 \tag{1.22}$$

$$\text{相関係数} = \frac{4.3333}{\sqrt{2.9167}\sqrt{7}} = 0.9590 \tag{1.23}$$

妖夢：相関係数は 0.9590 くらいということになりますね。

鈴仙：さて、次はあたしか…。回帰分析をすればいいんだったな。回帰分析のために新たに求めなければならない値は…、妖夢が出してない $E(X^2)$ になるかな。

$$E(X^2) = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2}{6} = 15.1667 \tag{1.24}$$

鈴仙：あとは回帰係数を求めるための連立方程式を立てて求めればいいかな…。

$$\begin{aligned} \alpha + 3.5\beta &= 5 \\ 3.5\alpha + 15.1667\beta &= 21.8333 \end{aligned} \tag{1.25}$$

鈴仙：これを解くと、

$$\alpha = 0.2000 \qquad \beta = 1.4857 \tag{1.26}$$

鈴仙：こうなるから、回帰分析のモデルはこんな感じになりますね。

$$y = 0.2000 + 1.4857x + \epsilon \tag{1.27}$$

輝夜：そうね。ご苦労様。ちなみにこの回帰モデルの決定係数は 0.9197 で、これは妖夢ちゃんが出してくれた相関係数 0.9590 の二乗の値になっているわ。

1.4 区間推定と t 検定

輝夜：続いては区間推定と統計的仮説検定、その中でも t 検定ね。t 検定や推定は医療統計学でもよく使うから今のうちに復習しておくのがいいわね。統計的仮説検定とは、まず帰無仮説を立てて、その帰無仮説の正当性を数学を使って検討する、って具合のものと言えるわ。一方区間推定は、標本から求めた要約統計量から、母集団の要約統計量を推定する方法ね。これらの手法は基本的に、標本の数を多くすれば標本の要約統計量は母集団のそれに近づくという**大数の法則**に従っているわ。

妖夢：区間推定や t 検定なら少しはわかります。平均値に関して検定を行うんですよね。

鈴仙：妖夢も t 検定はわかるんだ。

輝夜：妖夢ちゃんでも t 検定くらいはわかるのね。それじゃ早速解説してもらおうかしら。まずは、母分散が既知の場合に、平均値の信頼区間を求めるやり方からね。

妖夢：まずは母分散 σ が既知の場合ですけど、標本のサイズが n、標本の平均が $\bar{x}$、標準正規分布の右側 ϵ 点を $z(\epsilon)$ として*3、母平均 μ_x の信頼係数 $(1-\epsilon)$ の信頼区間は次のようになります。

$$\bar{x} - z(\epsilon/2) \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu_x \leq \bar{x} + z(\epsilon/2) \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{1.29}$$

妖夢：逆に検定の場合は、帰無仮説を $H_0 : \mu_x = \mu_0$ として、標本から求めた平均 $\bar{x}$ が次の範囲から外れたとき、帰無仮説を有意水準 ϵ で棄却します。

---

*3 標準正規分布の確率密度関数を $f(x)$ とするとき、次の値を満たす z のことを指す。

$$\int_z^{\infty} f(x)dx = \epsilon \tag{1.28}$$

$$\text{両側検定：} \quad \text{帰無仮説 } H_0 : \mu_x = \mu_0 \quad \text{棄却域：} \quad \bar{x} \leq \mu_0 - z(\epsilon/2) \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu_0 + z(\epsilon/2) \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \tag{1.30}$$

$$\text{右側検定：} \quad \text{帰無仮説 } H_0 : \mu_x < \mu_0 \quad \text{棄却域：} \quad \bar{x} \geq \mu_0 + z(\epsilon) \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{1.31}$$

$$\text{左側検定：} \quad \text{帰無仮説 } H_0 : \mu_x > \mu_0 \quad \text{棄却域：} \quad \mu_0 - z(\epsilon) \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \geq \bar{x} \tag{1.32}$$

輝夜：まあ母分散が既知のときの母平均の区間推定、ないし検定は統計的仮説検定の基礎中の基礎だし、まあこの辺は当然と言えるわよね。社会学とかの統計学では、妖夢ちゃんの言った「信頼区間」はだいたい 95% くらい、ϵ は 0.05 くらいにするのが一般的だけど、医学の統計学の場合は信頼区間 99%、ϵ は 0.01 くらいも求められることもあるようね。さて、母分散が未知のときはどうすればいいかしら、妖夢ちゃん。

妖夢：母分散が未知のときは、標本から求めた分散 ${s_x}^2$ を使い、また確率密度関数も標準正規分布ではなく、自由度 $n-1$ の t 分布を使います。自由度 $n-1$ の t 分布の右側 ϵ 点を $t_{n-1}(\epsilon)$ とすると、この場合の信頼係数 $1-\epsilon$ の信頼区間は次の通りですね。

$$\bar{x} - t_{n-1}(\epsilon/2) \times \frac{s_x}{\sqrt{n-1}} \leq \mu_x \leq \bar{x} + t_{n-1}(\epsilon/2) \times \frac{s_x}{\sqrt{n-1}} \tag{1.33}$$

鈴仙：妖夢、よく覚えてるね。あたしは検定とかだと式がこんがらがっちゃうこともあったりするから、この辺は正直苦手なんだよね…。

輝夜：イナバはこっち方面で弱点があったのね。それじゃ次は、母集団が 2 つあるときの場合ね。この 2 つの母集団における同じパラメータの平均値で違いがあるかどうかを示す検定の式はわかるかしら。ただ母分散は未知で、検定の棄却域は両側検定の場合だけでいいわ。妖夢ちゃんはわかる？

妖夢：2 つの母集団の平均値を比較する場合は、まずは分散が等しいかどうかを検定によって明らかにする必要があります。まず、帰無仮説を $H_0 : \mu_x = \mu_y$、2 つの母集団をそれぞれ x, y、それぞれのサイズを n_x, n_y として、次の統計量 F を求めます。

$$F = \frac{n_x {s_x}^2}{n_y {s_y}^2} \tag{1.34}$$

妖夢：この統計量 F が、自由度 (n_x-1, n_y-1) の F 分布の右側 ϵ 点 $F_{(n_x-1,n_y-1)}(\epsilon)$ より小さい場合、母分散は等しいと見なせるとします。で、母分散が等しいと見なされた場合は、標本平均の差 $\bar{x}-\bar{y}$ が次の範囲に入らないとき、帰無仮説を有意水準 ϵ で棄却します。

$$-t_{n_x+n_y-2}(\epsilon/2) \leq \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\dfrac{n_x {s_x}^2 + n_y {s_y}^2}{n_x+n_y-2}\left(\dfrac{1}{n_x}+\dfrac{1}{n_y}\right)}} \leq t_{n_x+n_y-2}(\epsilon/2) \tag{1.35}$$

妖夢：でも、母分散が違うと見なされたときの検定のやり方は、ちょっと複雑すぎてわからないです…。鈴仙さんはわかりますか？

鈴仙：**ウェルチの検定**でしょ？　検定の基礎的なところもよくわかってないのに、もっと複雑になるこれについてあたしに振られても困るよー。

輝夜：まあウェルチの検定は、自由度が小数になったりとかもあって、ちょっと複雑なのよね。ウェルチの検定は、自由度を θ として、次の統計量 T が $t_\theta(\epsilon/2)$ より大きくなるか、あるいは $-t_\theta(\epsilon/2)$ より小さくなるかしたら帰無仮説を棄却する検定のことを言うわ。また s' は不偏分散[*4]ね。

[*4] 以下の計算によって求める。

$$\textbf{不偏分散 } {s'_x}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2 = \frac{n}{n-1}{s_x}^2 \tag{1.36}$$

$$\tag{1.37}$$